مقدمة في الاحصاء والاحتمالات

(101 احص)

Introduction to Statistics and Probability

(STAT 101)

د. وليد المطيري

1. مقدمة:

علم الإحصاء (Statistics):

يعرف علم الإحصاء بأنه العلم الذي يبحث في جمع البيانات وتنظيمها وعرضها ووصفها وتحليلها واستقراء النتائج واتخاذ القرارات بناء عليها.

ينقسم علم الإحصاء إلى قسمين أساسيين :

١. **الإحصاء الوصفي:** يشمل جمع وتبويب البيانات الإحصائية. والطرق الوصفية تحتوي على توزيعات تكرارية، ورسوم بيانية، وطرق حساب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت ومختلف القياسات الأخرى.

٢. **الإحصاء الاستقرائي:** يبحث في تحليل البيانات واستقراء النتائج واتخاذ القرارات.

المجتمع الإحصائي (Population) والعينة الإحصائية (Sample)

المجتمع: هو مجموعة ذات خصائص مشتركة من الأفراد محل الدراسة.

وينقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين :

محدود: وهو الذي يكون فيه عدد محدود من الأفراد مثل عدد طلاب (مقرر مبادئ الإحصاء) في فصل معين ، عدد حبات الطماطم في صندوق...إلخ.

غير محدود : وهو الذي يكون فيه عدد الأفراد غير منتهٍ (غير محدود) والتي يمكن تميزها بعضها عن بعض مثل عدد النجوم في سماء يوم صحو ، عدد حبات القمح المحصود في مزرعة معينة ... إلخ.

العينة: بأنها جزء من المجتمع تختار بحيث تمثل جميع صفات المجتمع .

البيانات الإحصائية:

هي مجموعة المشاهدات أو الملاحظات المأخوذة أثناء دراسة معينة وقد تكون بيانات رقمية (كمية) مثل أطوال وأوزان مجموعة من الطلاب ودخول مجموعة من الأسر أو بيانات غير رقمية (وصفية) مثل لون البشرة والجنس... إلخ

المتغير (Variable):

هو مقدار له خصائص رقمية (كمية) وغير رقمية (وصفية) تتغير قيمته من عنصر إلى آخر من عناصر المجتمع أو العينة.

مصادر جمع البيانات الإحصائية:

المصدر الأول: تاريخي، وهو ما يؤخذ من السجلات المحفوظة مثل سجلات المواليد والوفيات وإحصاءات هيئة الأمم وغيرها.

المصدر الثاني : ميداني، وهو عبارة عن البيانات المجموعة من أفراد المجتمع كله أو جزء منه بالاتصال المباشر (المقابلة التي يقوم بها العدّادون) أو غير المباشر مثل البريد أو التليفون أو استخدام الطريقتين معًا حسب طبيعة المشكلة محل الدراسة.

2. طرق عرض البيانات:

- طريقة الجداول.
- طريقة المستطيلات أو الأعمدة.
- طريقة الخط المنكسر.
- طريقة الخط المنحني.
- طريقة الدائرة.

١. طريقة الجداول (Tables)

وهي عبارة عن وضع البيانات في جداول. وكثيرا ما تستعمل في عرض تغير ظاهرة مع الزمن أو مع مسميات كالبلدان والمدارس وغيرها أو مع الزمن والمسميات معًا. وعند استعمال هذه الطريقة يجب مراعاة ذكر ما يأتي:

- عنوان الجداول.
- الوحدات المستعملة.
- مذكرات المصادر التي أخذت منها البيانات.
- مذكرات تفسيرية تفسر شذوذ بعض البيانات إن وجدت.

مثال:

حركة شحن البضائع في ميناء العقبة خلال السنوات 1976 وحتى 1985

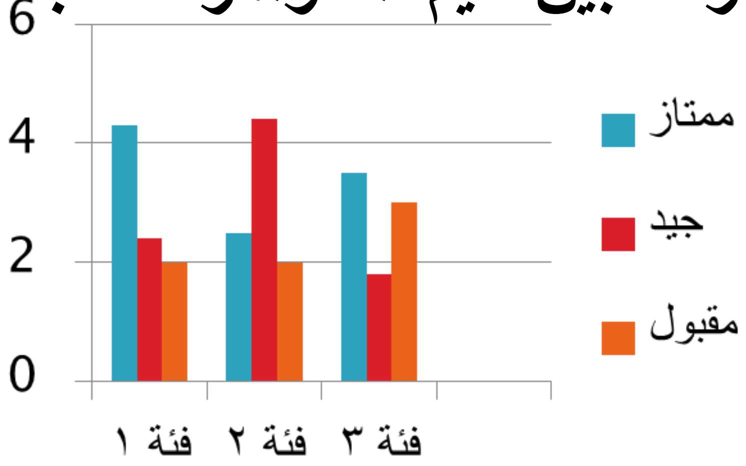
السنة	عدد البواخر
1976	1064
1977	944
1978	1197
1979	1238
1980	1466
1981	17744
1982	2599
1983	2454
1984	2329
1985	2671

المصدر: النشرة الإحصائية السنوية/ دائرة الإحصاءات العامة/ الأردن 1985 العدد 40

٢. طريقة الأعمدة أو المستطيلات (Bar Graph)

تتلخص هذه الطريقة بوضع المسمّيات على محور أفقي أو عمودي ورسم مستطيل على كل مسمّى بحيث يكون ارتفاع كل مستطيل ممثّلا للقيمة المقابلة لذلك المسمّى وذلك باستعمال مقياس رسم مناسب.

وتستعمل هذه الطريقة للمقارنة بين قيم الظواهر حسب الزمن أو المسميات.



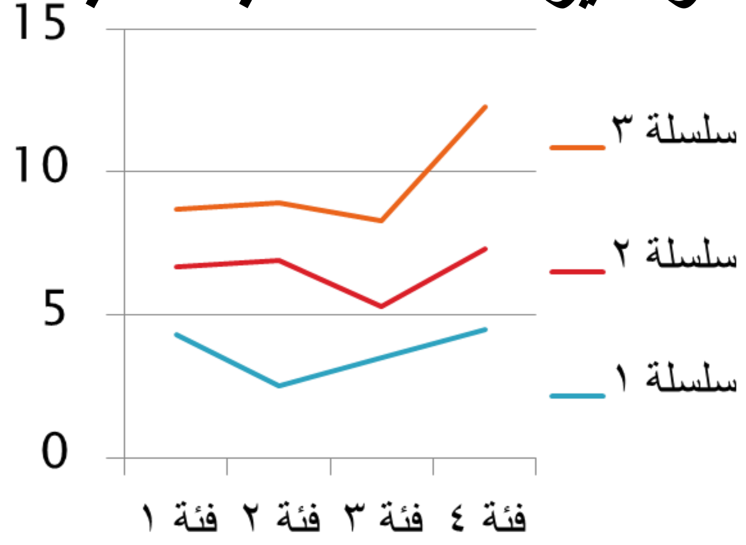
مثال:

يمثل الجدول التالي أعداد الطلبة المقبولين في إحدى الكليات في جامعة خاصة خلال السنوات 2000/2001 وحتى 2003/2004. اعرض هذه البيانات بطريقة المستطيل.

السنة	الذكور	الإناث	المجموع
2000/2001	300	200	500
2001/2002	200	350	550
2002/2003	450	400	850
2003/2004	350	300	650

٣. طريقة الخط المنكسر (Broken Line Graph)

تستعمل هذه الطريقة لعرض البيانات الناتجة من تغير ظاهرة أو عدة ظواهر مع مسمّيات أو مع الزمن أو كليهما مثل تغير درجة حرارة مريض مع الزمن بالساعات، أو تغير أعداد الطلاب في جامعة مع السنوات، أو تغير أعداد الطلاب حسب الكليات على فتر زمنية محددة.



مثال:

اعرض البيانات في مثال أعداد الطلبة السابق بطريقة الخط المنكسر.

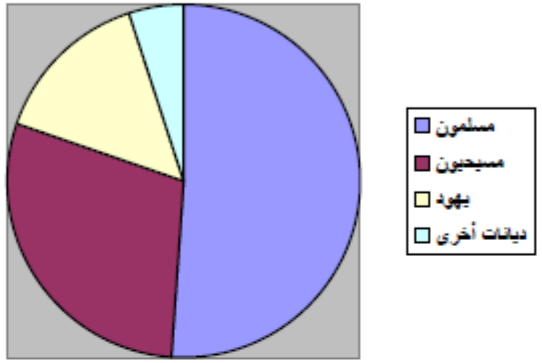
٤. طريقة الخط المنحني (Carve)

وهذه الطريقة تماثل طريقة الخط المنكسر ونحصل عليها بتمهيد الخط المنكسر ليصبح على شكل منحنى بدون زوايا وتستعمل هذه الطريقة عندما تتغير الظاهرة على فترات زمنية قصيرة وكثيرة.

مثال:

اعرض البيانات في مثال أعداد الطلبة السابق بطريقة الخط المنحني.

٥. الرسوم الدائرية (Circular Graph)



وأهم استعمالات هذه الطريقة يكون بتقسيم الكل إلى أجزائه، فيمثّل المجموع الكلّي بدائرة كاملة ويمثل كل جزء بقطاع دائرة وتعطى قياس زاويته بالقانون التالي:

$$\text{الزاوية المركزية لقطاع ممثل لقراءة معينة} = \frac{\text{القراءة نفسها}}{\text{مجموع القراءات}} \times 360^{0}$$

مثال:

بلغت أعداد الشركات في القطاعات المختلفة المشتركة في سوق الأوراق المالية/ بورصة عمان / نشرة التداول ليوم الاثنين 31/5/2008جريدة الرأي كما في الجدول التالي:

أعداد الشركات في القطاعات في سوق الأوراق المالية

القطاع	العدد
البنوك	15
التأمين	8
الخدمات	36
الصناعة	44

اعرض هذه البيانات بطريقة الدائرة.

مقاييس النزعة المركزية

للبيانات المفردة

١. المتوسط الحسابي:

الوسط الحسابي لمجموعة n من البيانات:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

يعرف على أنه مجموع هذه البيانات مقسوماً على عددها n. ويرمز له بالرمز μ أو $\overline{x}$ ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\mu = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

مثال: اذا كان لدينا البيانات التالية:

3, 5, 1, 4, 3, 2, 3

فاحسب المتوسط الحسابي؟

$$\mu = \frac{3+5+1+4+3+2+3}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

٢. الوسيط الحسابي:

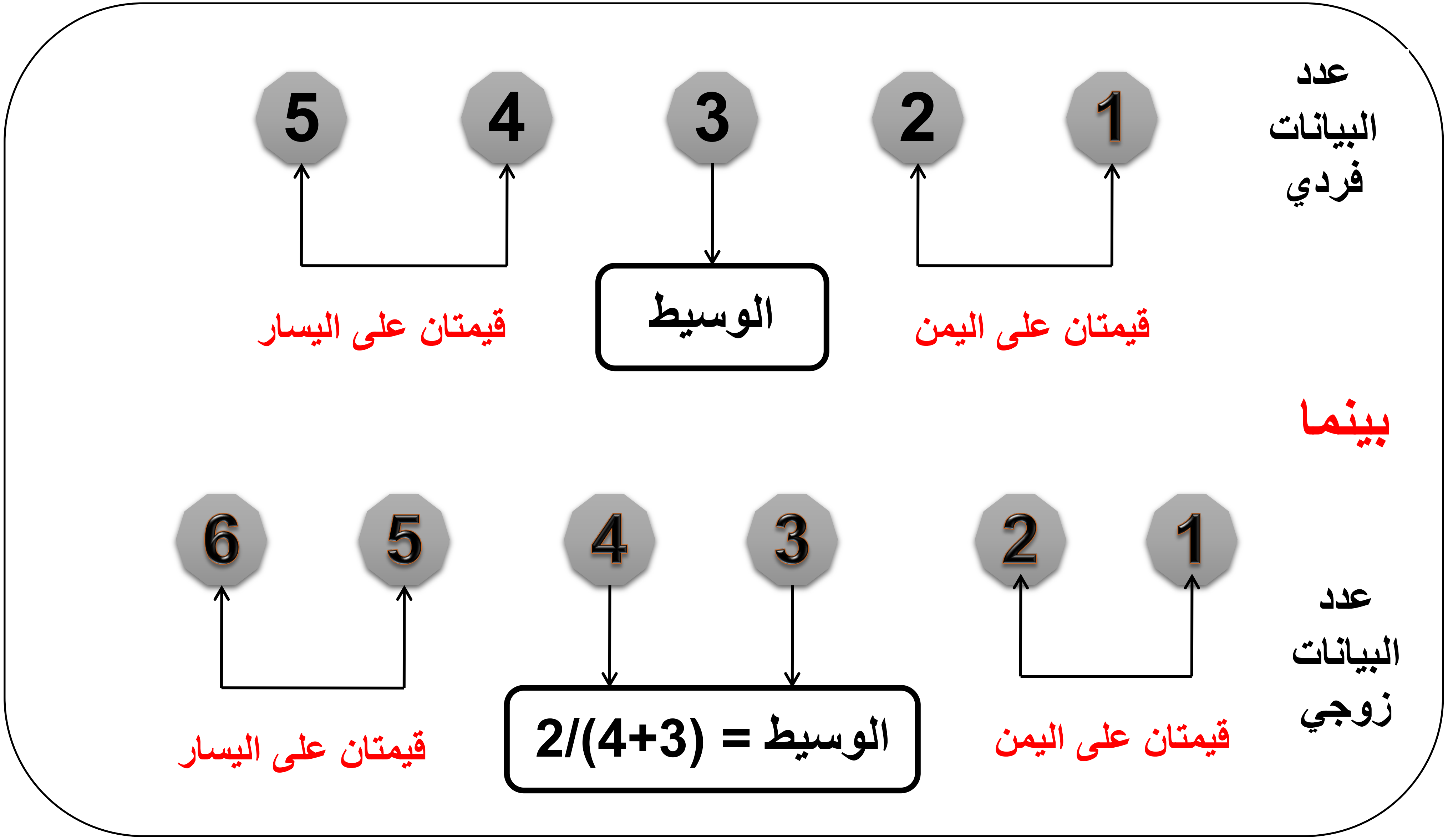
الوسيط الحسابي لمجموعة n من البيانات هو القيمة الواقعة في منتصف البيانات بعد ترتيبها ترتيبا تصاعديا أو تنازليا. ويرمز لها بالرمز $\boldsymbol{med}$. ولها حالتين:

الحالة الأولى: عندما يكون عدد البيانات فردي:

فان الوسيط هو القيمة الواقعة في منتصف البيانات بعد ترتيبها.

الحالة الثانية: عندما يكون عدد البيانات زوجي:

فانه توجد قيمتان تتوسطان هذه البيانات بعد ترتيبها ويعتبر الوسيط هو متوسط هذين القيمتين.


عدد البيانات فردي
1
2
3
4
5
قيمتان على اليمن
الوسيط
قيمتان على اليسار
بينما
عدد البيانات زوجي
1
2
3
4
5
6
قيمتان على اليمن
الوسيط = (4+3)/2
قيمتان على اليسار

مثال: أوجد الوسيط الحسابي للبيانات المفردة التالية:

66, 79, 33, 80, 34, 44, 60, 21, 75, 23, 11, 80, 83, 15, 20, 11, 30

الحل:

مثال: أوجد الوسيط الحسابي للبيانات المفردة التالية:

5, 15, 6, 18, 7, 19, 11, 7, 2, 9

الحل:

٣. المنوال:

المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً في البيانات ويرمز له بالرمز mod. قد يوجد في البيانات أكثر من منوال وكذلك قد لا يوجد للبيانات أي منوال.

مثال: احسب المنوال في الحالات التالية:

1. 5, 7, 2, 3, 7, 11, 5
2. 20, 23, 12, 19, 30
3. 105, 101, 115, 111, 99, 115, 103, 107

مقاييس التشتت

للبيانات المفردة

١. التباين:

التباين يستخدم لقياس مدى تشتت البيانات عن وسطها الحسابي.

فليكن لدينا البيانات التالية $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ وليكن $\overline{x}$ هو المتوسط (الوسط) الحسابي لها عندئذ فان تباين البيانات ويرمز له بإحدى الرمزين S^2 أو σ^2 ويعرف كالتالي:

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}$$

ولحساب التباين يفضل استخدام الجدول التالي:

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
x_1		
x_2		
…….		
x_n		
$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$		$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

مثال: اذا كان لدينا البيانات التالية

5, 1, 2, 6, 1, 3

فاحسب المتوسط الحسابي والتباين؟

x_i	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$
5		
1		
2		
6		
1		
3		
$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n = 6} =$		$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{5} =$

٢. الانحراف المعياري:

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين. ويتم حساب الانحراف المعياري بعد حساب التباين أولاً.

مثال: أوجد الانحراف المعياري للمثال السابق؟

البيانات المبوبة
وتوزيعاتها التكرارية

التوزيعات التكرارية (Frequency Distribution):

- هي إحدى الطرق التي نتمكن بواسطتها من تنظيم البيانات الكبيرة.

- **التوزيع التكراري:** هو عبارة عن جدول يلخص البيانات الأولية فيوزعها على فئات ويحدد عدد الأفراد الذين ينتمون إلى

كل فئة ويسمى هذا العدد تكرار الفئة، ويرمز له عادة بالرمز f.

- ولعمل الجدول التكراري نحتاج الى جدول تفريغ البيانات الإحصائية والذي يتكون من عمودين.

العمود الأول: يمثل الصفة أو الفئة.

العمود الثاني: يمثل التكرارات.

ملاحظة: يجب أن يكون مجموع التكرارات مساوياً لعدد البيانات الأولية المعطاة.

التوزيعات التكرارية للبيانات الوصفية:

- الجدول التكراري في هذه الحالة يكون عمله بشكل مباشر بإحصاء التكرارات لكل صفه

  واتباع الطريقة السابقة في كتابته.

- كل فئة في الجدول سوف تعبر عن صفة من صفات البيانات.

مثال:

اذا كان لدينا تقديرات ٣٦ طالب، فاعرض هذه البيانات في توزيع تكراري؟

x_i	f
A	
B	
C	
D	
E	
Total	

B B A E B D C D A

C A C B E C A D C

B E B C D D C E B

B D C B E D C E C

التوزيعات التكرارية للبيانات الكمية:

- في هذه الحالة لابد من حساب مدى البيانات (Range).

المدى = أعلى قيمة – أصغر قيمة

- يتم تقسيم قيم البيانات الى فئات يتراوح عددها من ٥ الى ١٥ فئة.
- يجب أن تكون الفئات منفصلة عن بعضها البعض.
- يفضل أن تكون أطوال الفئات متساوية في الطول.
- يجب أن تحتوي جميع الفئات على جميع قيم البيانات.

التوزيعات التكرارية للبيانات الكمية:

- خطوات عمل الفئات المنتظمة للبيانات الكمية:

1. نختار وحدة دقة القياس.
2. نحسب طول المدى. **المدى = أعلى قيمة – أصغر قيمة**
3. نختار عدد الفئات.
4. نحسب طول الفئة (L) كالتالي: **طول الفئة = المدى / عدد الفئات**، ثم التقريب الى أعلى حسب وحدة الدقة.
5. نحسب التكرارات لقيم البيانات في كل فئة.

جدول التوزيع التكراري للبيانات الكمية:

- يتكون الجدول من الأعمدة التالية:
  - الفئات المنتظمة.
  - الفئات الفعلية.
  - مركز الفئة.
  - تكرار كل فئة.

جدول التوزيع التكراري للبيانات الكمية:

- يتكون الجدول من الأعمدة التالية:
  - الفئات المنتظمة.
  - الفئات الفعلية.
  - مركز الفئة.
  - تكرار كل فئة.

- نعين الحد الأدنى للفئة الأولى وهي أصغر قراءة في البيانات ويضاف إليها طول الفئة لنحصل على بداية الفئة الثانية. ثم نضيف إلى بداية الفئة الثانية طول الفئة لنحصل على بداية الفئة الثالثة وهكذا لباقي الفئات.
- لإيجاد نهاية أي فئة نضيف إلى بدايتها طول الفئة مطروحاً منه وحدة الدقة.

خطوات تعيين الحدود الفعلية للفئات:

- اذا كانت البيانات مقربة لأرقام صحيحة فإننا نطرح 0.5 من الحد الأدنى المقرب للفئة لنحصل على الحد الأدنى الفعلي للفئة. ونضيف 0.5 الى الحد الأعلى لنحصل على الحد الأعلى الفعلي للفئة، وهكذا لباقي الفئات.
- أما اذا كانت البيانات محسوبة لأقرب رقم عشري فإننا نطرح 0.05 بدلاً من 0.5 ونتبع نفس الخطوات.

تعيين مركز الفئات:

يعرّف مركز الفئة بالعلاقة التالية:

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأعلى للفئة} + \text{الحد الأدنى للفئة نفسها}}{2}$$

ملاحظة:

1. مركز الفئة لا يتأثر بحدود الفئات سواء كانت حدوداً مقربة أو فعلية.
2. ليس من الضروري أن يكون مركز الفئة له نفس وحدة دقة البيانات.

حساب مركز الفئات:

نحسب مركز الفئة الأولى ثم نضيف طول الفئة لتعيين مركز الفئة الثانية وهكذا لباقي الفئات.

تفريغ البيانات:

نفرغ البيانات على الفئات ونسجل مجموع تكرارات كل فئة أمامها في عمود التكرارات.

• مثال:

تمثل البيانات التالية المبالغ بالريال التي يتقاضاها 45 مندوباً من مندوبي المبيعات في أحد الأسابيع. ضع هذه البيانات في جدول توزيع تكراري من 5 فئات متساوية في الطول.

حدود الفئة	الحدود الفعلية للفئة	مركز الفئة	التكرار
المجموع			

30	31	32	30	29	28	26	26	27
34	34	31	34	30	33	31	32	39
39	36	37	38	32	31	33	35	35
41	45	40	49	44	38	38	37	35
35	40	44	37	42	48	46	43	39

التوزيع التكراري النسبي:

- التوزيع التكراري النسبي يمكن اضافته للجدول السابق كعمود إضافي للتكرارات النسبية.
- **التكرار النسبي (p):** هو عبارة عن التكرار لأي فئة مقسوماً على مجموع التكرارات أي:

$$p = \frac{f}{n}$$

حيث n هو مجموع التكرارات و f هو تكرار الفئة.

<u>ويجب أن يكون مجموع التكرارات النسبية لجميع الفئات مساوياً للواحد.</u>

• مثال:

تمثل البيانات التالية المبالغ بالريال التي يتقاضاها 45 مندوباً من مندوبي المبيعات في أحد الأسابيع. ضع هذه البيانات في جدول توزيع تكراري من 5 فئات متساوية في الطول.

30	31	32	30	29	28	26	26	27
34	34	31	34	30	33	31	32	39
39	36	37	38	32	31	33	35	35
41	45	40	49	44	38	38	37	35
35	40	44	37	42	48	46	43	39

حدود الفئة	الحدود الفعلية للفئة	مركز الفئة	التكرار	التكرار النسبي
المجموع				

التوزيع التكراري المئوي:

- اذا ضربنا كل تكرار نسبي بـ 100 فإننا نحصل على التكرار المئوي.
- **ويجب أن يكون مجموع التكرارات المئوية لجميع الفئات مساوياً لـ 100.**
- **مثال:**

أوجد التكرار المئوي للجدول السابق؟

- **مثال:**

تمثل البيانات التالية المبالغ بالريال التي يتقاضاها 45 مندوباً من مندوبي المبيعات في أحد الأسابيع. ضع هذه البيانات في جدول توزيع تكراري من 5 فئات متساوية في الطول.

حدود الفئة	الحدود الفعلية للفئة	مركز الفئة	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المئوي
المجموع					

30	31	32	30	29	28	26	26	27
34	34	31	34	30	33	31	32	39
39	36	37	38	32	31	33	35	35
41	45	40	49	44	38	38	37	35
35	40	44	37	42	48	46	43	39

التوزيع التكراري المتجمع الصاعد "less than":

- يستخدم التوزيع التكراري المتجمع الصاعد لمعرفة عدد المشاهدات التي قيمتها تساوي قيمة معينة أو تكون أصغر منها.
- التوزيع التكراري المتجمع الصاعد يمكن اضافته لجدول التوزيع التكراري
- التوزيع التكراري المتجمع الصاعد لفئة معينة يعبر عن جميع التكرارات التي تساوي الحد الأعلى الفعلي للفئة أو تقل عنه.
- <u>مثال:</u>

أوجد التكرار المتجمع الصاعد للجدول السابق؟

• مثال:

تمثل البيانات التالية المبالغ بالريال التي يتقاضاها 45 مندوباً من مندوبي المبيعات في أحد الأسابيع. ضع هذه البيانات في جدول توزيع تكراري من 5 فئات متساوية في الطول.

30	31	32	30	29	28	26	26	27
34	34	31	34	30	33	31	32	39
39	36	37	38	32	31	33	35	35
41	45	40	49	44	38	38	37	35
35	40	44	37	42	48	46	43	39

حدود الفئة	الحدود الفعلية للفئة	مركز الفئة	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المئوي	التكرار المتجمع الصاعد
المجموع						

- <u>تمرين:</u>

أوجد جدول التوزيع التكراري مقسماً البيانات الى 5 فئات:

25 18 14 7 13 21 27 28 38 3 5 8 9 10 14 17 15 35 22 19 20 11 30 15 29 21

التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المئوي	التكرار النسبي	التكرار	مركز الفئة	الحدود الفعلية للفئة	حدود الفئة
						المجموع

- <u>تمرين:</u>

أوجد جدول التوزيع التكراري مقسماً البيانات الى 6 فئات:

25 18 14 7 13 21 27 28 38 3 5 8 9 10 14 17 15 35 22 19 20 11 30 15 29 21

التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المئوي	التكرار النسبي	التكرار	مركز الفئة	الحدود الفعلية للفئة	حدود الفئة
						المجموع

المتوسط الحسابي للبيانات المبوبة:

- لتكن $x_1, x_2, \dots, x_m$ هي مراكز الفئات و $f_1, f_2, \dots, f_m$ هي تكرارات الفئات عندئذ فان المتوسط الحسابي يكون:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{m}$$

مثال: أوجد المتوسط الحسابي للبيانات المبوبة التالية:

الفئات	تكرار الفئات f_i	مركز الفئات x_i	$x_i f_i$
5 - 7	3		
8 - 10	7		
11 - 13	2		
14 - 16	6		
17 - 19	2		
المجموع			

الفئة الوسيطية للبيانات المبوبة:

- وهي الفئة التي يوجد فيها الوسيط الحسابي
- تحديد الفئة الوسيطية:
- حالة فئة وسيطية واضحة: هي الفئة التي تكرارها الصاعد $\frac{n}{2}$

مثال: أوجد الفئة الوسيطية للبيانات المبوبة التالية:

التكرار المتجمع الصاعد	تكرار الفئات f_i	الفئات
	4	1-2
	8	3-4
	3	5-6
	1	7-8
	9	9-10
	5	11-12
	30	المجموع

الفئة الوسيطية للبيانات المبوبة:

- **<u>حالة فئة وسيطية غير واضحة:</u>** هي الخط الفاصل بين الفئتين اللتين تحصران $\frac{n}{2}$ في التكرار المتجمع الصاعد.

مثال: أوجد الفئة الوسيطية للبيانات المبوبة التالية:

التكرار المتجمع الصاعد	تكرار الفئات f_i	الفئات
	5	20-29
	4	30-39
	2	40-49
	3	50-59
	6	60-69
	20	المجموع

الوسيط للبيانات المبوبة:

$$med = A + \frac{\frac{n}{2} - f_1}{f_2 - f_1} \times L$$

f_1 التكرار الصاعد للفئة التي تسبق الفئة الوسيطية

f_2 التكرار الصاعد للفئة التي تلي الفئة الوسيطية

L طول الفئة

n عدد البيانات

A بداية الفئة الوسيطية: في حالة أن الفئة الوسيطية غير واضحة فإنها تصبح)نهاية الفئة قبل الخط الفاصل + بداية الفئة بعد الخط الفاصل2/(

مثال: احسب الوسيط للبيانات المبوبة التالية:

الفئات	تكرار الفئات f_i	التكرار المتجمع الصاعد
4-8	4	
9-13	6	
14-18	1	
19-23	7	
24-28	4	
المجموع	22	

مثال: احسب الوسيط للبيانات المبوبة التالية:

الفئات	تكرار الفئات f_i	التكرار المتجمع الصاعد
10-15	6	
16-21	4	
22-27	1	
28-33	8	
34-39	5	
المجموع	24	

تمرين: احسب المتوسط والوسيط للبيانات المبوبة التالية:

الفئات	تكرار الفئات f_i	التكرار المتجمع الصاعد	مركز الفئات x_i	$x_i f_i$
10-19	6			
20-29	7			
30-39	3			
40-49	8			
50-59	5			
60-69	1			
المجموع	30			

الفئة المنوالية للبيانات المبوبة:

- هي الفئة الأكثر تكراراً

مثال: أوجد الفئة المنوالية للبيانات المبوبة التالية:

الفئات	تكرار الفئات f_i
4-8	4
9-13	3
14-18	8
19-23	2
24-28	5
29-33	6
المجموع	

المنوال للبيانات المبوبة:

- المنوال هو:

$$mod = A + \frac{f - f_1}{2f - f_2 - f_1} \times L$$

f تكرار الفئة المنوالية

f_1 تكرار الفئة التي تسبق الفئة المنوالية

f_2 تكرار الفئة التي تلي الفئة المنوالية

L طول الفئة

A بداية الفئة المنوالية

مثال: أوجد المنوال للبيانات المبوبة التالية:

تكرار الفئات f_i	الفئات
4	4-8
3	9-13
8	14-18
2	19-23
5	24-28
6	29-33
	المجموع

تمرين: أوجد المنوال للبيانات المبوبة التالية:

الفئات	تكرار الفئات f_i
1-2	5
3-4	3
5-6	6
7-8	10
9-10	1
11-12	3
المجموع	28

التباين للبيانات المبوبة:

- لتكن $x_1, x_2, \dots, x_m$ هي مراكز الفئات و $f_1, f_2, \dots, f_m$ هي تكرارات الفئات وليكن $\overline{x}$ هو المتوسط الحسابي و **n** عدد البيانات عندئذ فان التباين يكون:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m} f_i (x_i - \overline{x})^2$$

مثال: ليكن لدينا البيانات المبوبة التالية:

فئات	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79
تكرار الفئات	2	1	3	4	1

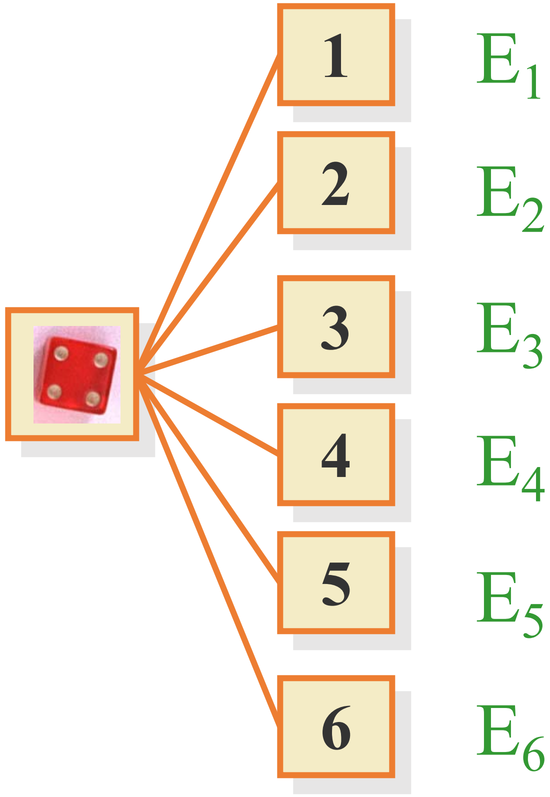
أوجد التباين؟

الفئات	تكرار الفئات f_i	مركز الفئة x_i	$x_i f_i$	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i(x_i - \overline{x})^2$
30-39	2					
40-49	1					
50-59	3					
60-69	4					
70-79	1					
المجموع	11		$\bar{x} =$			$S^2 =$

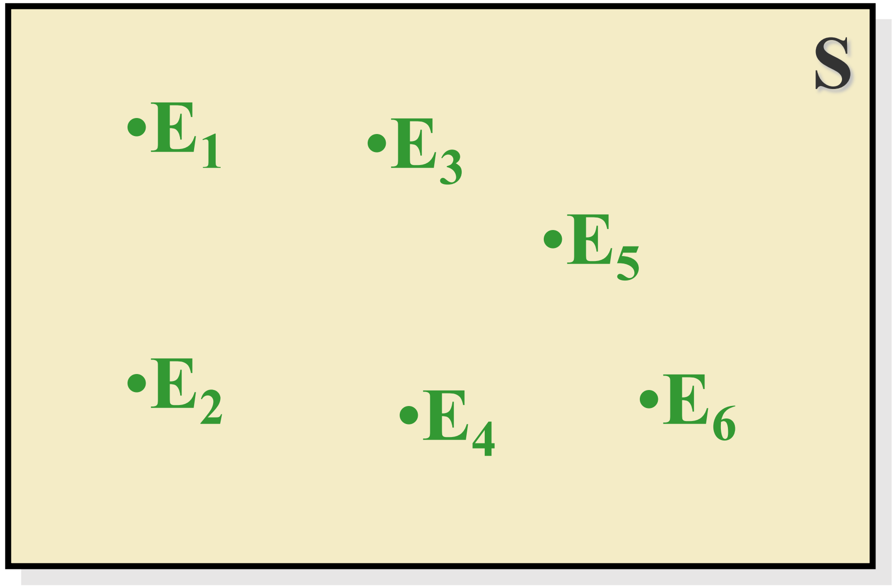
الاحتمالات

الاحتمالات:

- **التجربة العشوائية:** هي التجربة المعلوم نتائجها مسبقاً ولكن لا يمكن لأحد التنبؤ بحدوث أي من هذه النتائج أولاً.
    - مثال: رمي قطعة نقود أو رمي حجر النرد
- **فضاء العينة:** هو مجموعة تحوي جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية وغالباً يرمز لها بالرمز S.
    - مثال: فضاء العينة لرمي حجر النرد.
    - مثال: فضاء العينة لرمي قطعة نقود معدنية.



$$S = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$$



- **الحدث العشوائي:** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة وتحوي العناصر التي تحقق الهدف ونرمز له بالأحرف الكبيرة كـ .... A, B, C.

- **مثال:** في تجربة رمي قطعتي نقود معاً، لنفرض أن :

A: هو الحدث العشوائي الذي يعبر عن حدث ظهور وجهين مختلفين.

B: هو الحدث العشوائي الذي يعبر عن حدث ظهور صورة واحدة فقط.

C: هو الحدث العشوائي الذي يعبر عن حدث ظهور صورة واحدة على الأقل.

D: هو الحدث العشوائي الذي يعبر عن حدث ظهور صورة واحدة على الأكثر.

المطلوب:

- كتابة عناصر الأحداث A, B, C, D.

- **الحدث العشوائى المستحيل:** هو الحدث المستحيل وقوعه للتجربة العشوائية ونرمز له بالرمز للمجموعة الخالية ϕ.

- **مثال:** في تجربة رمي حجر النرد، لنفرض أن الحدث العشوائي هو الحصول على الوجه 10.

الحدث العشوائى الأكيد: هو الحدث المؤكد وقوعه للتجربة العشوائية ونرمز له بالرمز S والذي يعبر عن فضاء العينة.

مثال: رمي قطعتي نقود معاً، ولنفرض أن الحدث هو ظهور صورة أو كتابة.

مثال: في تجربة عشوائية لرمي حجري نرد معاً، أكتب فضاء العينة؟

افرض أن الحدث A يعبر عن ظهور حدثين متشابهين، اكتب عناصر الحدث A؟

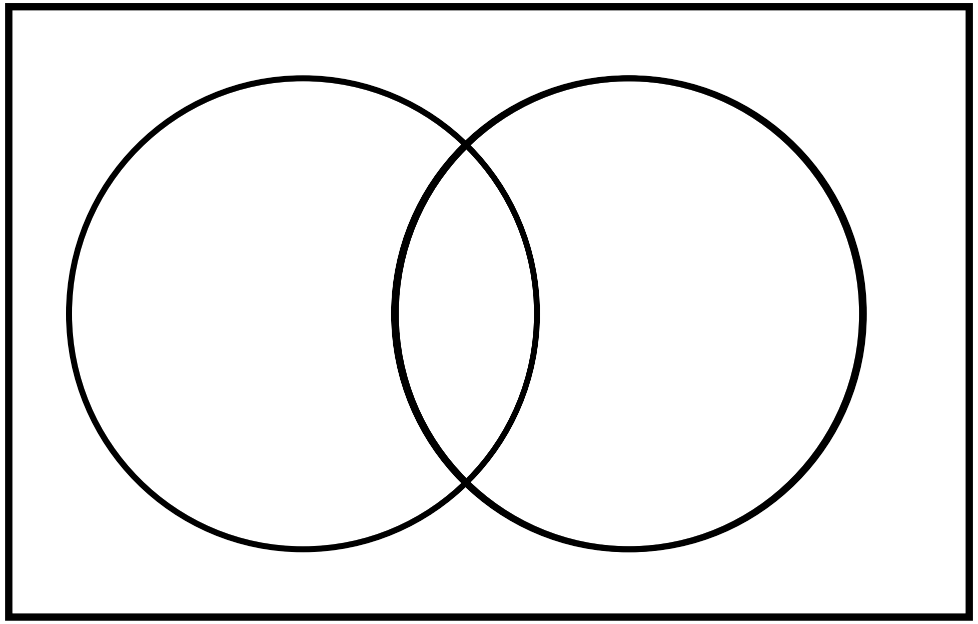
مثال: أسرة مؤلفة من ثلاث أطفال (ذكور (M)، اناث (F)) أكتب فضاء العينة لتوزيع الأطفال ذكوراً واناثاً في الأسرة؟

افرض أن الحدث A يعبر عن أن الأسرة المختارة لديها طفل واحد ذكر من بين الثلاثة أطفال، اكتب عناصر الحدث A؟

افرض أن الحدث B يعبر عن أن الأسرة المختارة لديها طفل واحد ذكر على الأكثر من بين الثلاثة أطفال، اكتب عناصر الحدث B؟

العمليات على الأحداث العشوائية أو المجموعات:

- **عملية التقاطع:** هو يعبر عن حدث التقاطع لحدثين أو أكثر معاً في آن واحد. ليكن A, B حدثين عشوائيين عندئذ يعبر التقاطع بين هذين الحدثين $A \cap B$ عن جميع العناصر المشتركة بينهما.



- **مثال:** في تجربة رمي حجر النرد، لنفرض أن :

A: هو الحدث العشوائي الذي يعبر عن حدث ظهور رقم زوجي.

B: هو الحدث العشوائي الذي يعبر عن حدث ظهور رقم فردي.

C: هو الحدث العشوائي الذي يعبر عن حدث ظهور رقم أصغر من أو يساوي 3.

D: هو الحدث العشوائي الذي يعبر عن حدث ظهور رقم أكبر من أو يساوي 3.

المطلوب:

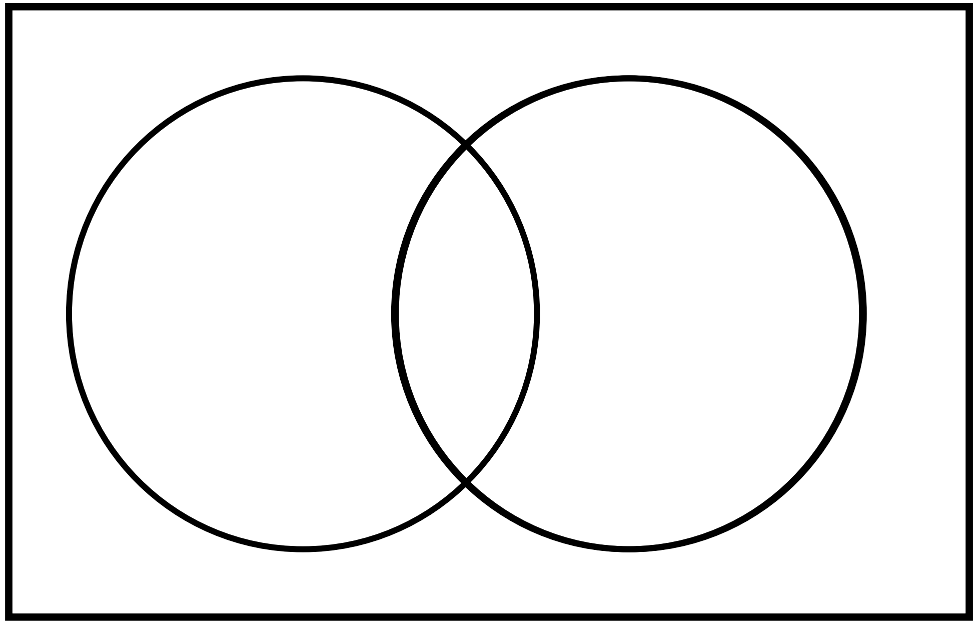
- كتابة عناصر الأحداث A, B, C, D.

وكذلك أوجد التالي:

- $A \cap B =$
- $A \cap C =$
- $A \cap D =$
- $B \cap C =$
- $B \cap D =$
- $C \cap D =$

- **عملية الاتحاد:** هو يعبر عن حدث وقوع الأحداث معاً أو أي منهم. ليكن A, B حدثين عشوائيين عندئذ يعبر الاتحاد بين هذين الحدثين

$A \cup B$ عن جميع عناصر A أو B أو كلاهما.

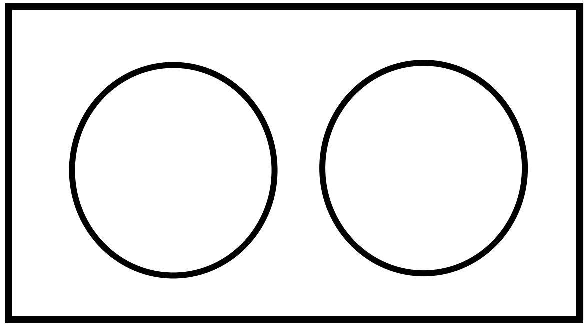


- **مثال:** تكملة للمثال السابق لرمي حجر النرد، أوجد التالي :

- $A \cup B$
- $A \cup C$
- $A \cup D$
- $B \cup C$
- $B \cup D$
- $C \cup D$

- **الأحداث العشوائية المتنافية:** هي استحالة وقوع الحادثتين معا أي عندما يكون

$$A \cap B = \emptyset$$

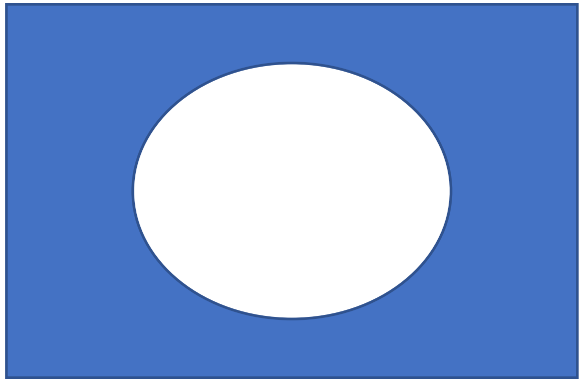


وتسمى أحداث متعاكسة اذا كان $A \cup B = S$

- **مثال:** في تجربة رمي قطعتي نقود معاً، لنفرض أن الحدث العشوائي A هو الحصول على وجهين

متشابهين والحدث B هو الحصول على وجهين مختلفين، بين اذا كان الحدثين متنافيين ولماذا؟

- **الأحداث العشوائية المكملة:** هي عناصر فراغ العينة S الغير موجودة في الحادثة A ويرمز لها بالرمز $\bar{A}$ أو A^c



- **مثال:** في تجربة رمي حجر نرد واحد، لنفرض أن الحدث العشوائي A هو ظهور رقم أصغر من أو يساوي 2، والمطلوب إيجاد الحدث العشوائي المكمل لـ A؟

خواص العمليات على الأحداث العشوائية:

- **التبديلية:**

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$$

- **التجميعية:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- **المجموعات الخالية وفضاء العينة:**

$$A \cup \emptyset = A, \qquad A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cup S = S, \qquad A \cap S = A$$

خواص العمليات على الأحداث العشوائية:

- **قانون ديمورغان:**

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

مثال: أوجد ناتج العلاقات التالية:

- $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{c}})^{\boldsymbol{c}} \cap \boldsymbol{B} =$
- $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{c}})^{\boldsymbol{c}} \cup \boldsymbol{B} =$

حساب الاحتمالات بالطرق التقليدية:

- اذا كان عدد عناصر الحدث العشوائي A يساوي n وكان عدد عناصر فضاء العينة يساوي m، عندئذ فان احتمال وقوع الحدث A هو p(A) ويعطى كالآتي:

$$p(A) = \frac{n}{m}$$

<u>مثال:</u> في تجربة رمي قطعتين من النقود المعدنية معاً احسب احتمال:

1. ظهور صورتين فقط؟
2. احتمال ظهور وجهين مختلفين؟

مثال: لنفرض أن التجربة العشوائية مكونة من رمي قطعة نقود معدنية و حجر نرد معاً.

- اكتب فراغ العينة.
- احسب الاحتمالات للأحداث التالية:
  - A: الحصول على صورة
  - B: الحصول على الوجه الذي عليه الرقم 3
  - C: الحصول على صورة ورقم أكبر من 4
  - D: الحصول على صورة ورقم أقل من 3

مسلمات الاحتمالات:

- من أجل أي حدث عشوائي A فإن: $0 \leq p(A) \leq 1$
- كلما اقترب الاحتمال من الواحد زادت قوة الاحتمال والعكس صحيح.
- $p(S) = 1,\ p(\emptyset) = 0$
- $p(A^c) = 1 - p(A) \qquad p(A) = 1 - p(A^c),$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- اذا كان الحدثين A, B حدثين متنافيين فإن: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

أمثلة:

- اذا كان $p(A) = 0.7$ فاحسب $p(A^c)$
- اذا كان احتمال نجاح الطالب يساوي 0.2 فاحسب احتمالية رسوبه.
- اذا كان احتمال نجاح الطالب في الاحصاء يساوي 0.3 وكان احتمال نجاحه في الفيزياء يساوي 0.4 واحتمالية النجاح في المقررين معاً يساوي 0.1، فاحسب احتمالية النجاح في أحد المقررين على الأقل؟

الاحتمال الشرطي:

- اذا كان A, B أحداث عشوائية فنسمي الحدث العشوائي $A|B$ حدث وقوع A بشرط أو معلومية وقوع الحدث B مسبقاً، وتحسب احتماليته كالتالي:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

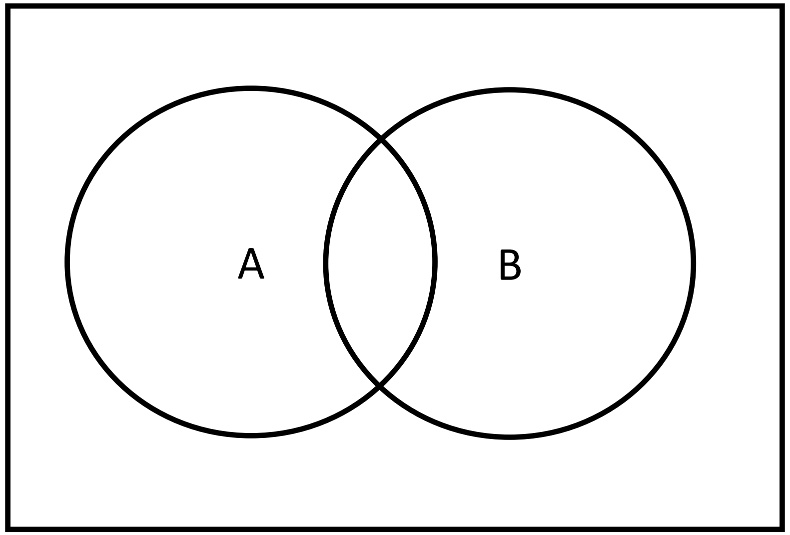
ويستنتج منها التالي:

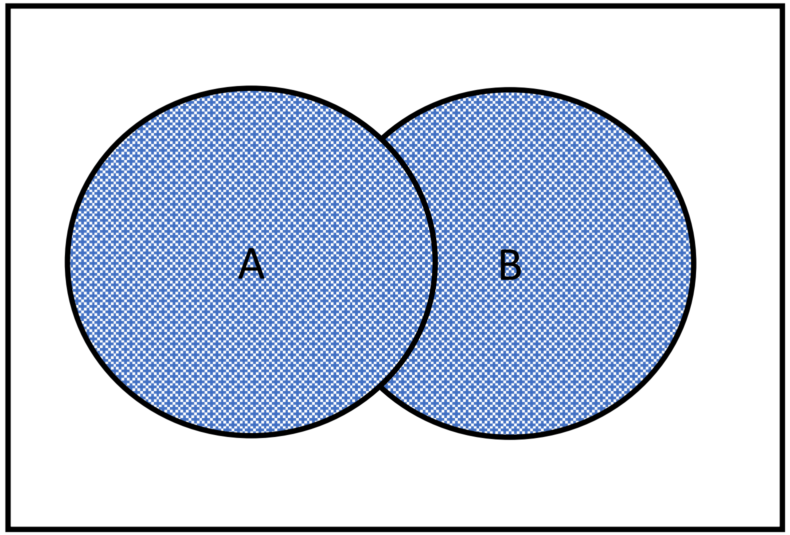
- $p(A \cap B) = p(A|B)p(B)$
- $p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$
- $p(A \cap B) = p(B|A)p(A)$

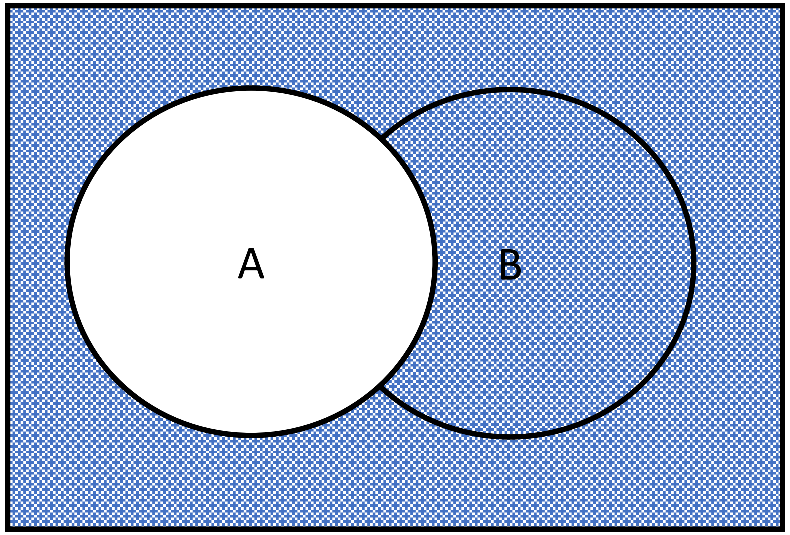
- <u>**مثال:**</u> اذا كان احتمال أن يكون الطقس غائماً يساوي 0.8 واحتمال أن يكون الطقس غائماً وماطراً في آن واحد هو 0.7 فاحسب احتمال أن يكون الطقس ماطراً اذا علمت أنه غائماً؟

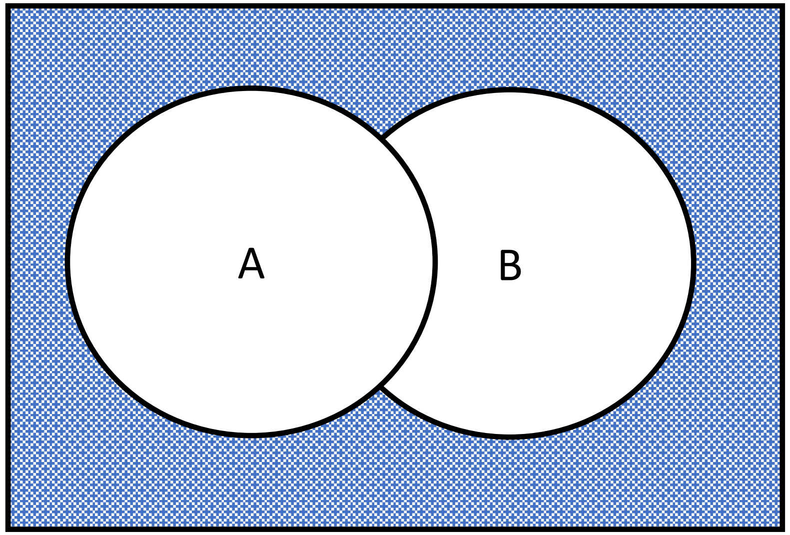
تمرين: إذا كان احتمال النجاح في مقرر A هو 0.6 واحتمال النجاح في مقرر B هو 0.7 واحتمال النجاح في مقرر واحد على الأقل هو 0.9. احسب الاحتمالات التالية:

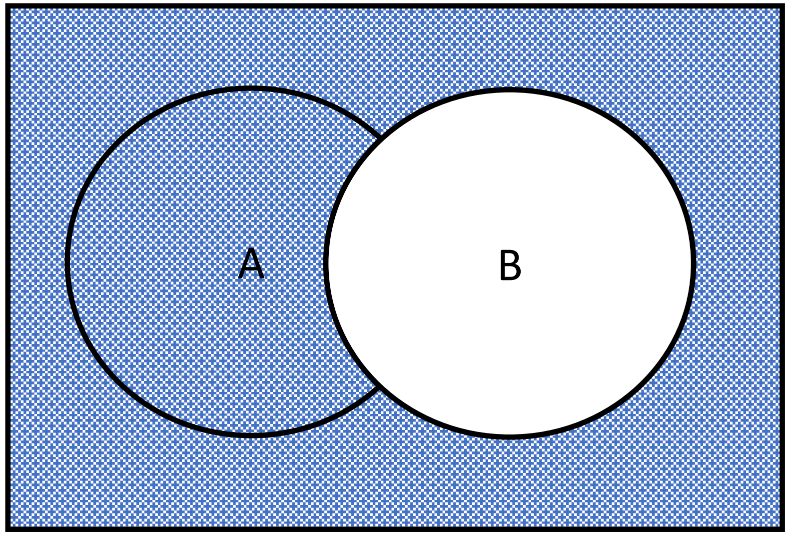
- احتمال النجاح في مقرر A و مقرر B
- احتمال النجاح في مقرر A فقط
- احتمال النجاح في مقرر B وعدم النجاح في مقرر A
- احتمال عدم النجاح في مقرر A ومقرر B
- احتمال النجاح في مقرر B أو عدم النجاح في مقرر A
- احتمال النجاح في مقرر A بمعلومية أنه تم النجاح في مقرر B
- احتمال النجاح في مقرر B بمعلومية أنه تم النجاح في مقرر A
- احتمال النجاح في مقرر B بمعلومية أنه تم الرسوب في مقرر A


A
B


A
B


A
B


A
B


A
B

الأحداث العشوائية المستقلة:

يقال عن الحدثين العشوائيين A, B أحداث عشوائية مستقلة اذا كان وقوع أي منهما لا يؤثر

على وقوع الآخر ويحقق الشروط التالية:

$$p(A|B) = p(A)$$

$$p(B|A) = p(B)$$

حيث أن: $p(A \cap B) = p(A)p(B)$

مثال: صندوق يحتوي على 10 كرات، 6 منها باللون الأسود و 4 باللون الأحمر. تم سحب بشكل عشوائي ومتتالي كرتين من الصندوق، احسب:

- احتمال ان تكون الكرتين في العينة المسحوبة باللون الأسود مع العلم أن السحب تم بدون الإعادة.
- احتمال ان تكون الكرتين في العينة المسحوبة باللون الأسود مع العلم أن السحب تم مع الإعادة.

مثال: صندوق يحتوي على 10 كرات، 6 منها باللون الأسود و 4 باللون الأحمر. تم سحب بشكل عشوائي ومتتالي كرتين من الصندوق، احسب:

- احتمال ان تكون احدى الكرتين في العينة المسحوبة باللون الأسود مع العلم أن السحب تم مع الإعادة.
- احتمال ان تكون احدى الكرتين في العينة المسحوبة باللون الأسود مع العلم أن السحب تم بدون الإعادة.

<u>مثال:</u> صندوق يحتوي على 10 كرات، 6 منها باللون الأسود و 4 باللون الأحمر. تم سحب بشكل عشوائي ومتتالي كرتين من الصندوق، احسب:

- احتمال ان تكون الكرة الأولى في العينة المسحوبة باللون الأسود والكرة الثانية باللون الأحمر مع العلم أن السحب تم مع الإعادة.
- احتمال ان تكون الكرة الأولى في العينة المسحوبة باللون الأسود والكرة الثانية باللون الأحمر مع العلم أن السحب تم بدون الإعادة.

مثال: في تجربة رمي هدف معين بثلاث طلقات بشكل متتالي، فاذا كان احتمال إصابة الهدف بالطلقة الأولى هو 0.3 واحتمال إصابة الهدف بالطلقة الثانية هو 0.4 واحتمال إصابة الهدف بالطلقة الثالثة هو 0.6، فاحسب:

احتمال إصابة الهدف بطلقتين فقط.

مثال: في تجربة رمي هدف معين بثلاث طلقات بشكل متتالي، فاذا كان احتمال إصابة الهدف بالطلقة الأولى هو 0.3 واحتمال إصابة الهدف بالطلقة الثانية هو 0.4 واحتمال إصابة الهدف بالطلقة الثالثة هو 0.6، فاحسب:

احتمال إصابة الهدف بثلاث طلقات فقط.

علاقة بايز والأحداث الشاملة:

اذا كان لدينا الأحداث العشوائية **A, B, C** والتي تشكل تغطية لفضاء العينة بمعنى:

$$S = A \cup B \cup C$$

فان هذه الاحداث تعتبر متنافية مثنى مثنى اذا تحقق أن:

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cap C = \emptyset$$

$$B \cap C = \emptyset$$

ولنفرض أن لدينا الحدث العشوائي **D** والذي يقع مع أحد الاحداث العشوائية السابقة، فانه يمكن استنتاج علاقة الأحداث الشاملة بالعلاقة التالية:

$$p(D) = p(D|A)p(A) + p(D|B)p(B) + p(D|C)p(C)$$

علاقة بايز والأحداث الشاملة:

وتكون علاقة بايز للأحداث السابقة كالتالي:

$$p(A|D) = \frac{p(D|A)p(A)}{p(D)}$$

$$p(B|D) = \frac{p(D|B)p(B)}{p(D)}$$

$$p(C|D) = \frac{p(D|C)p(C)}{p(D)}$$

مثال:

لدينا 3 مصانع تنتج مصابيح كهربائية فاذا تم بشكل عشوائي شراء مصباح كهربائي وكان احتمال أن يكون من **انتاج المصنع الأول هو 0.2** وأن يكون من **انتاج المصنع الثاني هو 0.35** واحتمال أن يكون من **انتاج المصنع الثالث هو 0.45**، فاذا علمت أن احتمال أن يكون المصباح المشترى مصباحاً **تالفاً مع العلم أنه من انتاج المصنع الأول هو 0.12** وأن يكون **تالفاً من انتاج المصنع الثاني هو 0.15** وأن يكون **تالفاً ومن انتاج المصنع الثالث هو 0.08**، فاحسب التالي:

- احتمال أن يكون المصباح المشترى تالفاً.
- اذا علمت أن المصباح المشترى تالفاً فما هو احتمال أن يكون من انتاج المصنع الثاني.

تمرين:

اذا علمت أن احتمال وقوع عطل ميكانيكي للسيارة هو 0.4 واحتمال وقوع عطل كهربائي للسيارة هو 0.5 واحتمال وقوع عطل للسيارة بسبب آخر هو 0.1، وبفرض أن احتمال تعطل السيارة بسبب عطل ميكانيكي هو 0.2 واحتمال تعطل السيارة بسبب عطل كهربائي هو 0.3 واحتمال تعطل السيارة بسبب آخر هو 0.11، فاحسب احتمال وقوع عطل كهربائي بالسيارة علماً أن السيارة قد تعطلت.

المتغيرات العشوائية

المتغيرات العشوائية:

المتغير العشوائي (Random Variable):

لنفرض أن S هو فضاء العينة لتجربة عشوائية. وبالتالي فان المتغير العشوائي X هو دالة حقيقية معرفة على فضاء العينة.

ملاحظات:

- المتغير العشوائي X يعطي قيمة حقيقية وحيدة لكل عنصر من عناصر فضاء العينة S.
- المتغير العشوائي X هو تطبيق مجاله فضاء العينة S ومجاله المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية R. $X: S \to R$
- اذا كانت $\omega \epsilon S$ نقطة عينة فان صورة ω تحت تأثير المتغير العشوائي X هي قيمة حقيقية أي أن: $X(\omega) \in R$.
- المجموعة $\boldsymbol{X(S) = \{X \in R: X(\omega) = X, \omega \in R\}}$ هي مدى التطبيق X وتسمى مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X وكذلك $X(S) \subseteq R$

أنواع المتغيرات العشوائية:

1- المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة)

2- المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

1- المتغير العشوائي المتقطع:

يكون المتغير العشوائي X متغيرا عشوائيا متقطعا اذا كانت مجموعة القيم الممكنة له X(S) هي مجموعة متقطعه أو قابلة للعد. ويمكن أن تأخذ احدى الحالتين:

$$X(S) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$X(S) = \{x_1, x_2, \dots\}$$

بشكل عام يرمز للمتغير العشوائي بالاحرف الانجليزية الكبيرة ويرمز للقيم التي يأخذها المتغير بالأحرف الانجليزية الصغيرة.

<u>أمثلة على المتغيرات العشوائية المتقطعة:</u>

1.

2.

3.

2- المتغير العشوائي المتصل:

- يمكن أن يعرف المتغير العشوائي X بأنه متغير عشوائي متصل اذا كانت جميع القيم الممكنة له هي عبارة عن قيم لأعداد حقيقية من فترة أو اتحاد فترات.

أمثلة:

1.
2.
3.

حساب الاحتمال في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة:

- **جدول التوزيع الاحتمالي:** هو وسيلة مساعدة لحساب الاحتمال ومؤلف من سطرين حيث الأعلى لقيم X والأسفل للاحتمالات المقابلة لها.

- ويحقق أن مجموع جميع الاحتمالات لابد أن يساوي الواحد كي يصبح جدول توزيع احتمالي منتظم.

مثال: هل الجدول التالي يحقق شرط التوزيع الاحتمالي المنتظم؟ ولماذا؟

X	2	3	4	5
P(X=x)	2/6	1/6	0	3/6

- **قانون التوزيع الاحتمالي:** هو وسيلة مساعدة لحساب الاحتمال وهو علاقة رياضية تربط قيم X بالاحتمالات الموافقة لها. كل قانون احتمالي يمكن تحويله الى جدول توزيع احتمالي.

- **مثال:** لنفرض أن لدينا القانون التالي:

$$\boldsymbol{p(X=x)=\frac{x}{15}; x=0,1,2,3,4,5}$$

ادرس اذا كان هذا القانون هو قانون توزيع احتمالي منتظم؟

X	0	1	2	3	4	5
P(X=x)						

- <u>مثال:</u> أسرة مؤلفة من ثلاثة أطفال ذكور واناث وليكن X يمثل عدد الذكور في الأسرة.

كون جدول التوزيع الاحتمالي للحدث العشوائي X.

- **مثال:** في تجربة رمي قطعتين من النرد معاً وليكن X يمثل مجموع الوجهين الظاهرين، كون جدول التوزيع الاحتمالي لهذا الحدث العشوائي.

- **<u>مثال:</u> في تجربة رمي قطعتين من النقود معاً وليكن X يمثل عدد الصور الظاهرة، كون جدول التوزيع الاحتمالي لهذا الحدث العشوائي.**

دالة التوزيع الاحتمالي التجميعية للمتغيرات العشوائية المتقطعة:

- هي دالة تعبر عن احتمالية ان يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أقل أو تساوي قيمة ما من القيم الممكنة من قيم المتغير العشوائي.
- يرمز لها بالرمز F(x) وتعرف بالشكل التالي:

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i)$$

وتحقق الشروط التالية:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ لأنها دالة احتمالية.
2. دالة غير متناقصة.

ملاحظة: اذا كانت F(x) هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X فان:

$$p(X > x) = 1 - p(X \leq x) = 1 - F(x)$$

- **حالات خاصة فى حساب الاحتمالات للمتغيرات العشوائية المتقطعة:**

نظرية: اذا كان X هو متغير عشوائي متقطع عندئذ فإن:

- $p(X < x) = p(X \leq x) + p(X = x)$
- $p(X \geq x) = 1 - p(X < x)$
- $p(X > x) = 1 - p(X \leq x)$

- **مثال:** لنفرض أن لدينا قانون التوزيع الاحتمالي المنتظم التالي:

$$p(X=x)=\frac{x+1}{21}; x=0,1,2,3,4,5$$

أوجد جدول التوزيع الاحتمالي وكذلك جدول التوزيع الاحتمالي التجميعي؟ ومن ثم أوجد:

- $p(X<2)$
- $p(X\geq 3)$
- $p(X>3)$

- تكملة للمثال السابق: أوجد التالي:

- $p(1 < X < 4)$
- $p(1 \le X < 4)$
- $p(1 < X \le 4)$
- $p(1 \le X \le 4)$

- **مثال:** في تجربة رمي قطعتي نرد معاً، أوجد فضاء العينة ومن ثم أوجد جدول التوزيع الاحتمالي للحدث العشوائي X والذي يمثل مجموع الوجهين الظاهرين؟

- تكملة لمثال عدد الذكور فى الأسرة: احسب التالي:
  - احتمال وجود طفلين على الأكثر من الذكور.
  - احتمال وجود طفلين على الأقل من الذكور.

التوقع الرياضي في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة:

- **قانونه:**

$$E\big(g(x)\big) = \sum_{x_i \in X} g(x_i)\, p(X = x_i)$$

$$E(x) = \sum_{x_i \in X} x_i\, p(X = x_i)$$

مثال: احسب التوقع الرياضي؟

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	1/28	2/28	3/28	4/28	5/28	6/28	7/28

التباين في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة:

- قانونه:

$$var(x) = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2$$

$$E(x^2) = \sum_{x_i \in X} x_i^2\, p(X = x_i)$$

مثال: احسب التباين لقانون التوزيع الاحتمالي التالي:

$$p(X = x) = \frac{x}{6}; X = 0, 1, 2, 3$$

حساب الاحتمال في حالة المتغيرات العشوائية المتصلة:

- ليكن X متغير عشوائي متصل عندئذ نسمي الدالة f(x) دالة الكثافة الاحتمالية وتحقق الشروط التالية:

- $f(x) \geq 0, \forall x$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

- **مثال:** اذا كان لدينا الدالة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 2x; 0 \leq X \leq 1 \\ 0; O.W. \end{cases}$$

بين هل تحقق شروط دالة الكثافة الاحتمالية؟

- **مثال:** اذا كان لدينا الدالة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}}; 0 < X \leq 4 \\ 0; O.W. \end{cases}$$

فاحسب قيمة c التي تجعل منها دالة كثافة احتمالية؟

- **مثال:** بين هل الدالة التالية دالة كثافة احتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^2;\ 0 \leq X \leq 2 \\ 0;\ O.W. \end{cases}$$

حساب الاحتمال في حالة المتغيرات العشوائية المتصلة:

- تتم حساب الاحتمالات عن طريق دالة التوزيع التجميعية للمتغيرات العشوائية المتقطعة ويرمز لهذه الدالة بـ F(x) وتأخذ العلاقة التالية:

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

مثال: اذا كانت لدينا دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}; & 0 \leq X \leq 4 \\ 0; O.W. & \end{cases}$$

احسب الاحتمالات التالية: F(1)، p(X<2).

حالات خاصة في حساب الاحتمال:

- اذا كان X متغير عشوائي متصل فإن:

- $p(X = a) = 0$
- $p(X \le x) = p(X < x)$
- $p(X \ge x) = 1 - p(X < x)$
- $p(a \le X \le b) = p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

مثال: اذا علمت أن $p(X \le 4) = 0.5$ فاحسب $p(X < 4)$ و $p(X = 3)$.

- **مثال:** اذا كان لدينا دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 2x; 0 \leq X \leq 1 \\ 0; O.W. \end{cases}$$

فاحسب التالي:

- $p\left(X = \frac{1}{3}\right)$
- $p\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$
- $p\left(X > \frac{1}{2}\right)$
- $p(X \geq \frac{1}{2})$

- **مثال:** اذا كان لدينا دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}; 1 \leq X \leq 6 \\ 0; O.W. \end{cases}$$

فاحسب التالي:

- $p(X \geq 2)$
- $p(2 \leq X \leq 3)$
- $p(X > 3)$
- $p(X = 3)$

التوقع الرياضي في حالة المتغيرات العشوائية المتصلة:

- **قانونه:**

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- **مثال:** اذا كان لدينا دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{4}; 0 \leq X \leq 4 \\ 0; O.W. \end{cases}$$

فاحسب التوقع الرياضي E(x)؟

- **مثال:** اذا كان لدينا دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}; 0 \leq X \leq 6 \\ 0; O.W. \end{cases}$$

فاحسب التوقع الرياضي؟

التباين في حالة المتغيرات العشوائية المتصلة:

- **قانونه:**

$$var(x) = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

مثال: احسب التباين لدالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \,;\, 0 \le X \le 1 \\ 0 \,; \quad O.W. \end{cases}$$

التوزيعات الاحتمالية

التوافيق:

- قانونه:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

مثال: احسب C_3^8؟

بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة:

- **التوزيع الثنائى:**

- وهو توزيع عام لتوزيع برنولي.
- اذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع ثنائي الحد فان قانونه الاحتمالي:

$$p(X = x) = C_x^n\, p^x\, q^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

- حيث أن n تمثل عدد التجارب و p تمثل احتمالية النجاح في حالة تجربة واحدة فقط
- q=1-p حيث $0 \leq p \leq 1$
- ويعبر عن ذلك كالاتي:

$$X \sim Bin(n, p)$$

• توزيع ثنائى الحد:

- مثال: اذا كان X متغير عشوائي متقطع ويخضع لتوزيع ثنائي الحد كالاتي

$$X \sim Bin(n = 5, p = 0.3)$$

- فاكتب قانون توزيعه الاحتمالي؟

- واحسب $p(X \leq 1)$ وكذلك $p(X > 2)$؟

- **<u>خواص توزيع ثنائى الحد :</u>**

- التوقع الرياضي:

$$E(x) = n\,p$$

- التباين:

$$var(x) = n\,p\,q$$

- **<u>مثال:</u> اذا كان X يخضع لتوزيع ثنائي الحد بمعاملاته التاليه: $n = 7, p = \frac{1}{7}$ فأوجد توقعه وتباينه؟**

ثم أوجد جدول توزيعه الاحتمالي؟

- **تطبيقات توزيع ثنائى الحد :**

- يستخدم هذا التطبيق في حالات تكرار التجارب العشوائية التي تثمر عن **نتيجتين فقط** ولذلك سمي توزيع ثنائي الحد.

- فاذا كان لدينا تجربة عشوائية تأخذ قيمتين فقط وكررت n من المرات فان احتمالية حصول احد الحدثين (وليكن حدث النجاح A) **للتجربة العشوائية لمره واحدة فقط** هو

$$p(A) = p$$

- واحتمالية الحصول الحدث الآخر (وليكن حدث الفشل $\bar{A}$) **للتجربة العشوائية لمره واحدة فقط** هو:

$$p(\bar{A}) = q = 1 - p$$

- فانه باستطاعتنا حساب احتمالية عدد مرات وقوع الحدث A عند تكرار التجربة n من المرات عن طريق توزيع ثنائي الحد.

- **تطبيقات توزيع ثنائى الحد :**

مثال: في تجربة رمي قطعة نقود معدنية لخمس مرات متتالية، احسب احتمالية ظهور الصورة مرتين اذا علمت أن احتمالية ظهور الصورة لرمية واحدة فقط هو 0.5؟

بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة:

- **توزيع بواسون:**
- اذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع بواسون فان قانونه الاحتمالي:

$$p(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \qquad x=0,1,2,\dots,\infty$$

- حيث أن λ تمثل معدل حدوث الحدث العشوائي X.
- ويعبر عن ذلك كالاتي:

$$X \sim poisson(\lambda)$$

- **خصائصه:**
  - **التوقع الرياضي:**

$$E(X)=\lambda$$

  - **التباين:**

$$var(X)=\lambda$$

- **توزيع بواسون:**

- مثال: بفرض أن X متغير عشوائي متقطع ويخضع لتوزيع بواسون بمتوسط 2، اكتب قانونه الاحتمالي وخواصه؟

- واحسب $p(X \leq 1)$ وكذلك $p(X > 2)$؟

بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة:

- **توزيع سحب العينات:**
  - **قانونه:**

$$p(X=x)=\frac{C_x^{N_1}C_{n-x}^{N_2}}{C_n^N}=\frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

حيث:

- C هي التوافيق
- N حجم المجتمع
- N_1 عدد عناصر الصنف الأول من المجتمع N
- N_2 عدد عناصر الصنف الثاني من المجتمع N
- N حجم العينة العشوائية

• توزيع سحب العينات:

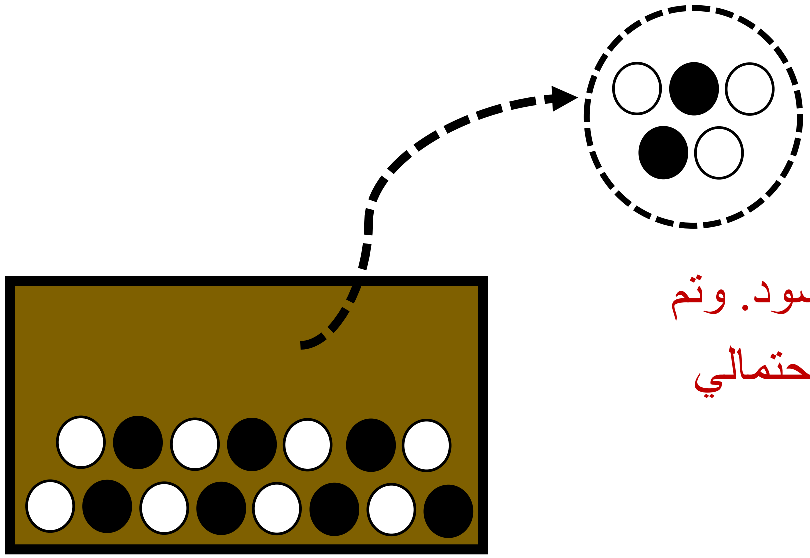
• **قانونه:**

$$p(X=x)=\frac{C_x^{N_1}C_{n-x}^{N_2}}{C_n^N}=\frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

وتعبر أنه لدينا مجتمع حجمه N ومقسم الى جزئين: الجزء الأول وعدد عناصره N_1 والجزء الثاني وعدد عناصره N_2. فاذا سحبنا عينه عشوائية حجمها n عندئذ اذا كان X يمثل عدد عناصر الجزء الأول من العينة فان n-x يمثل عدد عناصر الجزء الثاني.

• توزيع سحب العينات:

• مثال:



- لدينا صندوق يحتوي على 15 كرة، 8 منها باللون الأبيض والباقي باللون الأسود. وتم سحب عينه عشوائية من الصندوق حجمها 5 كرات، فاكتب قانون التوزيع الاحتمالي لـ X الذي يمثل عدد الكرات البيضاء في العينة العشوائية.

- واوجد جدول التوزيع الاحتمالي؟

- وأوجد $p(X \leq 1)$؟

بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتصلة:

- **التوزيع الأسي:**
- اذا كان المتغير العشوائي المتصل X يتبع التوزيع الأسي فان دالة كثافته الاحتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}; x \geq 0 \\ 0; O.W. \end{cases}$$

- ويقال عن المتغير العشوائي المتصل X أنه يتبع التوزيع الأسي بمعلومية المعلمة $\lambda; \lambda > 0$
- خواصه:
  - التوقع:

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

  - التباين:

$$var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- **تطبيقات التوزيع الأسى:**

- اذا كان المتغير العشوائي المتصل X يتبع التوزيع الأسي بمعلمة λ فانه قد يمثل:
  - الزمن اللازم للانتظار للحصول على خدمة ما من مركز خدمة.
  - الزمن اللازم للحصول على وجبة إفطار من مطعم ماكدونالدز.
  - الزمن اللازم للشفاء من مرض معين.

مثال: اذا كان X يخضع للتوزيع الأسي بالمعلمة $\lambda = 3$ فأوجد:

- دالة الكثافة الاحتمالية؟
- التوقع والتباين؟
- $p(X \leq 1)$

بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتصلة:

- **التوزيع الطبيعي:**

- يقال عن المتغير العشوائي المتصل X أنه يتبع التوزيع الطبيعي بالمعلمتين (μ,σ) اذا كانت دالة كثافته الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}; -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$$

- ويعبر عن ذلك كالاتي:

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

- **خصائصه:**
  - **التوقع الرياضي:**

$$E(X) = \mu$$

  - **التباين:**

$$var(X) = \sigma^2$$

- **التوزيع الطبيعى:**
  - مثال: بفرض أن X متغير عشوائي متصل ويخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 70 وانحراف معياري 10، فاكتب دالة كثافته الاحتمالية وتوقعه وتباينه؟

- **التوزيع الطبيعى:**

  - مثال: بفرض أن لدينا دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$$

اكتب اسم التوزيع وأوجد قيم معالمه؟

بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتصلة:

- **التوزيع الطبيعي المعياري:**

- هو حالة خاصة من التوزيع الطبيعي حيث $(\mu = 0, \sigma = 1)$ أي أن دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}; -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$$

- ويعبر عن ذلك كالاتي:

$$X \sim N(0,1)$$

- **خصائصه:**
  - **التوقع الرياضى:**

$$E(X) = 0$$

  - **التباين:**

$$var(X) = 1$$